静岡理工科大学　理工学部　情報システム学科

Scilabを用いた2,3次元線型常微分方程式の解析解計算スクリプトの開発

0613006　渥美 一平　【担当教員　幸谷 智紀】

2010年2月18日

1．研究目的

本研究の目的は，対角化可能な実定係数のm次元非斉次線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

の解析解

$$\mathbf{x}(t) = \exp(tA)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]\mathbf{g}(\tau)d\tau$$

に対応したプログラムを，フリーの数値計算ソフトScilab を用いて直接計算するスクリプトとして実装することである。解析解を直接計算する方法として，行列の対角化を用いる解法とラグランジュ・シルベスター補間公式を用いる解法があるので，それぞれに対応したものを作成し，計算精度と計算時間を計測して比較検討を行う。

2．線型常微分方程式の解析解計算法

○対角化を用いる方法

今回は行列Aは対角行列Λに対角化可能なものに限定しているので

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m] = \Lambda$$

と表現できる。ここでλ_iは行列Aの固有値である。

この対角化行列Tを用いて解析解を

$$\exp(tA) = T\exp(t\Lambda)T^{-1}$$

$$\int_0^t \exp[(t-\tau)A]\mathbf{g}(\tau)d\tau = T\int_0^t \exp[(t-\tau)\Lambda](T^{-1}\mathbf{g}(\tau))d\tau$$

と計算する。

○ラグランジュ・シルベスター補間公式を用いる方法

行列Aのすべての固有値が異なる場合，行列指数関数$\exp(tA)$は，射影行列P_i

$$P_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{A-\lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}$$

を用いて表現できるので，解析解は

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^{m} \exp(\lambda_i t)P_i$$

$$\int_0^t \exp[(t-\tau)A]\mathbf{g}(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{n} P_i \int_0^t \exp[(t-\tau)\lambda_i]\mathbf{g}(\tau)d\tau$$

として計算できる。

3．Scilabスクリプトの実装と計算実験結果

以上二つの解析解計算法を用いた Scilab スクリプトを作成し，2，3次元の例題を解いて計算結果と計算時間を比較した。その結果，それぞれのスクリプトは例題の解析解と同じ値を求めることが確認でき，これらの解析解計算法スクリプトは間違っていないことが確認できた。

積分区間を広げて計算時間の比較を行ったところ，2,3 次元どちらにおいても対角化を用いる解法の方が計算時間が2倍ほど速いことが判明した。

積分区間tの値を1から100まで伸ばしても値はどちらのスクリプトでも同じものが得られることは確認済みである。しかし，tの値を300まで伸ばしたところ，ラグランジュ・シルベスターの補間公式を用いたスクリプトは正しい値を示さなくなってしまった。

従って，計算精度・時間のどちらにおいても対角化を用いた計算法が優れていることが分かった。

4．今後の課題

Scilabスクリプトの文法理解が及ばず，2，3次元線型常微分方程式の解析解計算に対応したスクリプトしか作成できなかった。今後の課題は任意次元の問題に対応したスクリプトを作成し，その有効性を確認することである。

参考文献

＊　三井・小藤「常微分方程式の解法」共立出版

＊　Scilab，http://www.scilab.org/